LAHENDUSED 11.KLASS

1. **<u>Vastus:</u> Sobivad täisarvude paarid on (2,4) ja (0,0).**

<u>Lahendus:</u>

Teisendame võrrandit $ab = a^2 + b$:

$$b(a-1) = a^2$$

$$a^2 = a^2 - 1 + 1 = (a-1)(a+1) + 1$$

Ning saame:

$$b(a-1) = (a-1)(a+1) + 1$$

millest viime $(a-1)(a+1)$ võrrandi teisele poole ja tegurdame ning saame võrrandi

$$(a-1)(b-a-1) = 1$$

Kuna otsitavad a ja b on täisarvud, siis ka $a-1$ ja $b-a-1$ on täisarvud.

Et nende korrutis on võrdne 1-ga, siis on võimalikud 2 juhtu:

1) $a-1=1$ ja $b-a-1=1$, millest järeldub, et $a=2$ ja $b=4$.

2) $a-1=-1$ ja $b-a-1=-1$, millest järeldub, et $a=0$ ja $b=0$.

<u>Hindamine</u>

Võrrandi teisendamine kujule $(a-1)(b-a-1)=1$	4p
Järeldamine, et kuna a ja b on täisarvud, , siis ka $a-1$ ja $b-a-1$ on täisarvud	1p
Järeldamine, et 1 saamiseks on olemas ainult kaks võimalust	1p
Arvude paaride leidmine	<u>1p</u>
	7p

Ainult õige vastuse eest anda 1p

2. Vastus: $\dfrac{-p+\sqrt{p^2+\frac{240sp}{t}}}{2}$

Lahendus:

	s, km	v, km/h	t, h
Esialgne plaan	s	x	$\frac{s}{x}$
Uus plaan	s	$x+p$	$\frac{s}{x+p}$

Kuna rong väljus jaamast *A* jaama *B* suunas *t* minutit planeeritust hiljem, siis saame koostada võrrandi

$$\frac{s}{x}-\frac{s}{x+p}=\frac{t}{60}$$

Lahendame antud võrrandi.

$$\frac{sx+sp-sx}{x(x+p)}=\frac{t}{60}$$

$$x^2+px-\frac{60sp}{t}=0$$

$$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2+\frac{240sp}{t}}}{2}$$

$$x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2+\frac{240sp}{t}}}{2}$$

$x_2<0$, seega ei vasta ülesande tingimustele.

Hindamine:

Keskmiste kiiruste tähistamine avaldistega x ja $x+p$ 1p

Sõiduaegade $\frac{s}{x}$ ja $\frac{s}{x+p}$ leidmine 1p

Võrrandi koostamine 2p

Võrrandi lahendite leidmine 2p

Märkamine, et ainult üks lahend vastab ülesande tingimustele 1p

7p

3.

Lahendus:

Olgu $n = 5$, siis saame $2^5 > 5^2$, mis on tõene võrratus.

Oletame, et eksisteerib $n = k$ nii, et $2^k > k^2$ on tõene.

Näitame, et siis on ka $2^{k+1} > (k+1)^2$ tõene.

$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + k^2$

Kuna $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, siis peame näitama, et $k^2 > 2k + 1$:

$k^2 - 2k - 1 > 0$, kui $k \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2};\ +\infty)$.

Seega $k > 4$ korral on $k^2 > 2k + 1$, järelikult

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + k^2 > (k+1)^2.$$

Hindamine:

Näitamine, et $n = 5$ korral on võrratus $2^n > n^2$ tõene	1p
Oletamine, et eksisteerib $n = k$ nii, et $2^k > k^2$ on tõene	1p
Võrratuse $2^{k+1} > (k+1)^2$ koostamine	1p
Võrratuse $2^k + 2^k > k^2 + k^2$ koostamine	1p
Võrratuse $k^2 > 2k + 1$ tõestamine	2p
Õige järelduse: $2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + k^2 > (k+1)^2$ tegemine	1p
	7p

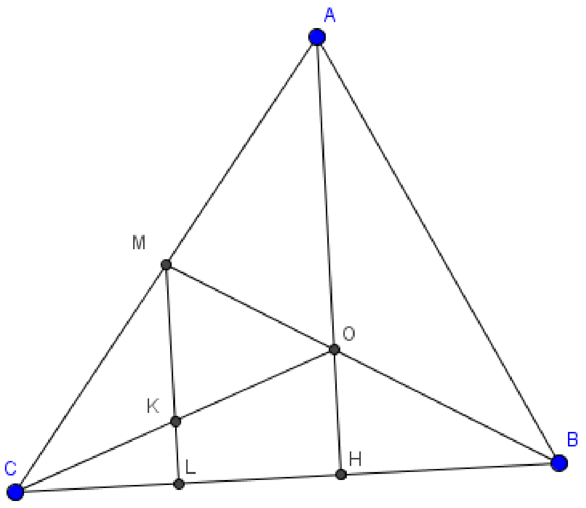
4.

Lahendus:

AM= MC

punkt O on AH ja BM lõikepunkt

OM = OB



Ühendame punktid C ja O.

Kuna O on lõiku MB keskpunkt, siis OC on kolmnurga BCM mediaan.

Tõmbame kolmnurgas BCM kõrguse ML.

Punkt K on kõrguse ML ja mediaani CO lõikepunkt.

Tõestame, et CK = KO:

ML on kolmnurga AHC kesklõik, kuna

CM = MA ja ML ja AH on paraleelsed.

Järelikult, ML poolitab lõiku ka lõiku OC, ehk

CK = KO, m.o.t.t.

Hindamine:

Joonis, kus on kolmnurgas BCK tõmmatud kõrgus punktist M ja mediaan punktist C	2p
Tõestamine, et ML on kolmnurga ACH kesklõik	3p
Näitamine, et eelmisest järeldub, et CK = KO, ehk et kolmnurgas BMC kõrgus Lõikab mediaani pooleks	2p
	7p

5. <u>Vastus:</u> võidab Peeter

<u>Lahendus:</u>

Teine mängija (Peeter) saab alati võta nii palju münte kotist, et kokku tema ja eelmise käiguga võetud müntide arv oleks täpselt 18:

Kui Jüri võtab 7 münti, siis Peeter võtab 11

Kui Jüri võtab 9 münti, siis Peeter võtab 9

Kui Jüri võtab 11 münti, siis Peeter võtab 7

2017 annab 18-ga jagades jäägi 1, ehk $2017 \equiv 1 \pmod{18}$

Siit järeldub, et kui Peeter alati võtab nii palju münte, et tema ja eelneva käigu võetud müntide arvu summa on 18, siis sõltumata Jüri käikudest lõppuks viimaseks käiguks jääb 1 münt, ehk Jüri ei saa oma käiku teha ja kaotab.

Vastus: Kui mõlemad mängijad mängivad optimaalse strateegia järgi, siis võidab Peeter.

<u>Hindamine:</u>

Märkimine, et teisel mängijal on alati võimalik võta nii palju münte, et koos eelneva käiguga oleks kokku võetud 18	3p
Selgitamine, et selline taktika viib Peetri võiduni	<u>4p</u>
	7p

Ainult õige vastus – 0 p.